

МИНОБРНАУКИ РОССИИ



Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

**«Российский государственный гуманитарный университет»  
(ФГБОУ ВО «РГГУ»)**

**ИНСТИТУТ ИНФОРМАЦИОННЫХ НАУК И ТЕХНОЛОГИЙ БЕЗОПАСНОСТИ**

Факультет информационных систем и безопасности  
Кафедра фундаментальной и прикладной математики

## **ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПОЛЯ**

### **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

Направление подготовки 01.03.04 Прикладная математика  
Направленность (профиль) Математика информационных сред

Уровень квалификации выпускника - бакалавр  
Форма обучения - очная

РПД адаптирована для лиц  
с ограниченными возможностями  
здоровья и инвалидов

Москва 2021

**ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПОЛЯ**

Рабочая программа дисциплины

Составители:

Д. пед. н., профессор, зав. кафедрой фундаментальной и прикладной математики

*В.К. Жаров*

Д. ф.-м. н., профессор, профессор кафедры фундаментальной и прикладной математики

*В.М. Максимов*

Ответственный редактор

Д. пед. н., профессор, зав. кафедрой фундаментальной и прикладной математики

*В.К. Жаров*

Технический редактор

специалист по УМР 1 категории кафедры фундаментальной и прикладной математики

*Гусева Т.А.*

**УТВЕРЖДЕНО**

Протокол заседания кафедры

фундаментальной и прикладной математики

№ 13 от 28.06.21

## **ОГЛАВЛЕНИЕ**

### **1. Пояснительная записка**

#### 1.1 Цель и задачи дисциплины

1.2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с индикаторами достижения компетенций

#### 1.3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

### **2. Структура дисциплины**

### **3. Содержание дисциплины**

### **4. Образовательные технологии**

### **5. Оценка планируемых результатов обучения**

#### 5.1. Система оценивания

#### 5.2. Критерии выставления оценки по дисциплине

5.3. Оценочные средства (материалы) для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

### **6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

#### 6.1. Список источников и литературы

#### 6.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

### **7. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

### **8. Обеспечение образовательного процесса для лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов**

### **9. Методические материалы**

#### 9.1. Планы практических занятий

#### 9.2. Методические рекомендации по подготовке письменных работ

## 1. Пояснительная записка

### 1.1. Цель и задачи дисциплины

Цель дисциплины: познакомить студента с весьма важной прикладной областью математического знания как локально компактные поля.

Задачи дисциплины: на примерах показать способы моделирования с использованием основной теории, задач действительности.

### 1.2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с индикаторами достижения компетенций

Компетенция (код и наименование)	Индикаторы компетенций (код и наименование)	Результаты обучения
ПК-1. Способен проводить систематизацию, алгоритмизацию конкретных информационных потоков по месту научных исследований, производственной деятельности	ПК-1.1. Переформулирует задачи, данные на естественных языках конкретного научного знания на необходимый язык математики; формулирует теоремы	<i>Знать:</i> классические методы анализа и синтеза стационарных линейных систем, методы пространства состояний; <i>Уметь:</i> выбирать конкретные методы для анализа и синтеза для решения прикладной задачи; <i>Владеть:</i> навыками формализации прикладных задач.
	ПК-1.3. В достаточной степени владеет культурой доказательств математических положений	<i>Знать:</i> классические методы анализа и синтеза стационарных линейных систем, методы пространства состояний; <i>Уметь:</i> выбирать конкретные методы для анализа и синтеза для решения прикладной задачи; <i>Владеть:</i> навыками формализации прикладных задач.

### 1.3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Топологические поля» относится к части, формируемой участниками образовательных отношений блока дисциплин учебного плана.

Для освоения дисциплины необходимы знания, умения и владения, сформированные в ходе изучения следующих дисциплин (модулей): «Общая алгебра и теория чисел», «Математический анализ».

В результате освоения дисциплины формируются знания, умения и владения, необходимые для изучения следующих дисциплин: «Теория кодирования».

## 2. Структура дисциплины

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 3 з.е., 108 ч., в том числе контактная работа обучающихся с преподавателем 42 ч., самостоятельная работа обучающихся 66 ч.

№ п/п	Раздел дисциплины/темы	Семестр	Виды учебной работы (в часах)				Формы текущего контроля успеваемости, форма промежуточной аттестации <i>(по семестрам)</i>
			контактная			Самостоятельная работа	
			Лекции	Практические занятия	Промежуточная аттестация		

№ п/п	Раздел дисциплины/темы	Семестр	Виды учебной работы (в часах)				Формы текущего контроля успеваемости, форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			контактная			Самостоятельная работа	
			Лекции	Практические занятия	Промежуточная аттестация		
1	Теоремы Дедекинда о строении полупростых коммутативных алгебр над полем действительных чисел	7	4	4		14	
2	Топологические группы, кольца, тела.	7	6	4		14	Контрольная работа
3	Неархимедовы метрики и топология в поле рациональных чисел.	7	4	8		14	Рефераты, доклады
4	Доказательство теоремы Понтрягина о строении локально бикompактных связных тел. Доказательство теоремы Ковальского о строении вполне несвязных топологических тел.	7	6	6		14	Рефераты, доклады Коллоквиум
5	Зачёт с оценкой	7		2		10	Ответы на теоретические вопросы, итоговая контрольная работа
	Итого:		18	24		66	

### 3. Содержание дисциплины

**Тема 1.** Теоремы Дедекинда о строении полупростых коммутативных алгебр над полем действительных чисел.

Теоремы Фробениуса об конечномерных алгебрах с делением над полем действительных чисел.

**Тема 2.** Топологические группы, кольца, тела.

Связные и вполне несвязные. Общие свойства топологических тел.

Локально-компактные простые кольца.

Их строение, строение аддитивной группы, типы топологий. Теоремы Jacobson-Tousky.

Строение коммутативных топологических групп.

**Тема 3.** Неархимедовы метрики и топология в поле рациональных чисел.

Теорема Островского. Поля  $p$ -адических чисел, их свойства и приложения. Некоторые обобщения полей  $p$ -адических чисел (конечные расширения).

**Тема 4.** Доказательство теоремы Понтрягина о строении локально бикompактных связных тел.

О строении локально бикompактных связных тел.

Доказательство теоремы Ковальского о строении вполне несвязных топологических тел.

О строении локально бикompактных связных тел.

#### 4. Образовательные технологии

№ п/п	Наименование раздела	Виды учебных занятий	Образовательные технологии
1	2	3	4
1	Теоремы Дедекинда о строении полупростых коммутативных алгебр над полем действительных чисел	Лекции  Практическое занятие  Самостоятельная работа	Вводная лекция с использованием видеоматериалов  Решение типовых задач для закрепления и формирования знаний, умений, навыков  Консультирование и проверка домашних заданий посредством электронной почты
2	Топологические группы, кольца, тела.	Лекции  Практическое занятие  Самостоятельная работа	Лекция-визуализация с применением слайд-проектора.  Решение типовых задач для закрепления и формирования знаний, умений, навыков  Подготовка к занятию с использованием электронного курса лекций
3	Неархимедовы метрики и топология в поле рациональных чисел.	Лекции  Практическое занятие  Самостоятельная работа	Лекции беседы, с разбором теоретических задач  Решение типовых задач для закрепления и формирования знаний, умений, навыков  Подготовка к занятию с использованием электронного курса лекций
4	Доказательство теоремы Понтрягина о строении локально бикомпактных связных тел. Доказательство теоремы Ковальского о строении вполне несвязных топологических тел.	Лекция  Практическое занятие  Самостоятельная работа	Лекции беседы, с разбором теоретических задач  Решение типовых задач для закрепления и формирования знаний, умений, навыков  Подготовка к занятию с использованием электронного курса лекций

#### 5. Оценка планируемых результатов обучения

##### 5.1. Система оценивания

Форма контроля	Макс. количество баллов	
	За одну работу	Всего
Текущий контроль: - Рефераты, доклады	5 баллов	25 баллов

- Контрольная работа	25 баллов	25 баллов
- Коллоквиум	10 баллов	10 баллов
Промежуточная аттестация		
- Ответы на теоретические вопросы		20 баллов
- Итоговая контрольная работа		20 баллов
<b>Итого за семестр (дисциплину)</b> Зачет с оценкой		100 баллов

Полученный совокупный результат конвертируется в традиционную шкалу оценок и в шкалу оценок Европейской системы переноса и накопления кредитов (European Credit Transfer System; далее – ECTS) в соответствии с таблицей:

Таблица соответствия, дающая ECTS, в соответствии с таблицей:			
100-балльная шкала	Традиционная шкала		Шкала ECTS
95 – 100	отлично	зачтено	A
83 – 94			B
68 – 82			C
56 – 67	удовлетворительно		D
50 – 55			E
20 – 49	неудовлетворительно	не зачтено	FX
0 – 19			F

## 5.2. Критерии выставления оценки по дисциплине

Баллы/ Шкала ECTS	Оценка по дисциплине	Критерии оценки результатов обучения по дисциплине
100-83/ A,B	«зачтено (отлично)»	Выставляется обучающемуся, если он глубоко и прочно усвоил теоретический и практический материал, может продемонстрировать это на занятиях и в ходе промежуточной аттестации. Обучающийся исчерпывающе и логически стройно излагает учебный материал, умеет увязывать теорию с практикой, справляется с решением задач профессиональной направленности высокого уровня сложности, правильно обосновывает принятые решения. Свободно ориентируется в учебной и профессиональной литературе. Оценка по дисциплине выставляется обучающемуся с учётом результатов текущей и промежуточной аттестации. Компетенции, закреплённые за дисциплиной, сформированы на уровне – «высокий».
82-68/ C	«зачтено (хорошо)»	Выставляется обучающемуся, если он знает теоретический и практический материал, грамотно и по существу излагает его на занятиях и в ходе промежуточной аттестации, не допуская существенных неточностей. Обучающийся правильно применяет теоретические положения при решении практических задач профессиональной направленности разного уровня сложности, владеет необходимыми для этого навыками и приёмами. Достаточно хорошо ориентируется в учебной и профессиональной литературе. Оценка по дисциплине выставляется обучающемуся с учётом результатов текущей и промежуточной аттестации. Компетенции, закреплённые за дисциплиной, сформированы на уровне – «хороший».
67-50/	«зачтено	Выставляется обучающемуся, если он знает на базовом

Баллы/ Шкала ECTS	Оценка по дисциплине	Критерии оценки результатов обучения по дисциплине
D,E	(удовлетворительно)»	<p>уровне теоретический и практический материал, допускает отдельные ошибки при его изложении на занятиях и в ходе промежуточной аттестации.</p> <p>Обучающийся испытывает определённые затруднения в применении теоретических положений при решении практических задач профессиональной направленности стандартного уровня сложности, владеет необходимыми для этого базовыми навыками и приёмами.</p> <p>Демонстрирует достаточный уровень знания учебной литературы по дисциплине.</p> <p>Оценка по дисциплине выставляются обучающемуся с учётом результатов текущей и промежуточной аттестации.</p> <p>Компетенции, закреплённые за дисциплиной, сформированы на уровне – «достаточный».</p>
49-0/ F,FX	не зачтено	<p>Выставляется обучающемуся, если он не знает на базовом уровне теоретический и практический материал, допускает грубые ошибки при его изложении на занятиях и в ходе промежуточной аттестации.</p> <p>Обучающийся испытывает серьёзные затруднения в применении теоретических положений при решении практических задач профессиональной направленности стандартного уровня сложности, не владеет необходимыми для этого навыками и приёмами.</p> <p>Демонстрирует фрагментарные знания учебной литературы по дисциплине.</p> <p>Оценка по дисциплине выставляются обучающемуся с учётом результатов текущей и промежуточной аттестации.</p> <p>Компетенции на уровне «достаточный», закреплённые за дисциплиной, не сформированы.</p>

5.3. Оценочные средства (материалы) для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

#### Текущий контроль

##### *Примерные темы рефератов, докладов:*

1. Локально-компактные простые кольца.
2. Теорема Островского.
3. Поля  $p$ -адических чисел, их свойства и приложения.
4. Некоторые обобщения полей  $p$ -адических чисел (конечные расширения).

##### *Примерные задания для контрольной работы:*

1. Верно ли, что мощность всех отображений, множества состоящего хотя бы из одного элемента, больше исходного множества? Ответ доказать.
2. Верно ли, что компактное пространство нормально? Доказать.
3. Убедитесь, что  $\rho$  – метрика и что индуцируемая ею топология эквивалентна тихоновской топологии.
4. Гильбертов куб (пример, счетное произведение отрезков  $[0;1]$ ) – метризуемое топологическое пространство.



***Примерные вопросы для коллоквиума:***

1. Теоремы Дедекинда о строении полупростых коммутативных алгебр над полем действительных чисел.
2. Теоремы Фробениуса об конечномерных алгебрах с делением над полем действительных чисел.
3. Связные и вполне несвязные.
4. Общие свойства топологических тел.
5. Локально-компактные простые кольца и их строение.
6. Строение аддитивной группы, типы топологий.
7. Теоремы Jacobson-Tousky.
8. Строение коммутативных топологических групп.
9. Теорема Ковальского о строении вполне несвязных топологических тел.
10. Теорема Понтрягина о строении локально бикompактных связных тел.
11. Локально-компактные простые кольца.
12. Теорема Островского.
13. Поля  $p$ -адических чисел, их свойства и приложения.
14. Некоторые обобщения полей  $p$ -адических чисел (конечные расширения).

**Промежуточная аттестация**

***Примерные контрольные вопросы по курсу:***

1. Теоремы Дедекинда о строении полупростых коммутативных алгебр над полем действительных чисел.
2. Теоремы Фробениуса об конечномерных алгебрах с делением над полем действительных чисел.
3. Связные и вполне несвязные.
4. Общие свойства топологических тел.
5. Локально-компактные простые кольца и их строение.
6. Строение аддитивной группы,
7. ного пространства образуют топологию: а)  $\square, \emptyset$ , и все подмножества типы топологий.
8. Теоремы Jacobson-Tousky.
9. Строение коммутативных топологических групп.
10. Теорема Ковальского о строении вполне несвязных топологических тел.
11. Теорема Понтрягина о строении локально бикompактных связных тел.

***Примерные практические задания для итоговой контрольной работы:***

1. Описать все топологии множества  $\{a, b\}$ .
2. Какие из следующих семейств веществен  $(-\infty, x)$ ; б)  $\square, \emptyset$ , и все подмножества  $(-\infty, x]$ .
3. Показать, что семейство интервалов вида  $(-n, n)$ ,  $n$  – натуральное число, является открытым покрытием вещественной прямой с обычной топологией, из которого нельзя извлечь конечно подпокрытия.
4. Доказать, что компактное метрическое пространство сепарабельно.

**6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

- 6.1. Список источников и литературы

## Литература

### Основная

1. Наймарк, М. А. Нормированные кольца [Электронный ресурс] / М. А. Наймарк. - 3-е изд. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2010. - 688 с., 3 ил. - ISBN 978-5-9221-1273-4. - Текст: электронный. - URL: <https://new.znaniium.com/catalog/product/544789>
2. Гельфанд, И. М. Коммутативные нормированные кольца / И.М. Гельфанд, Д.А. Райков, Г.Е. Шилов. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2011. - 260 с. (Классика и современность. Математика). ISBN 978-5-9221-1331-1, 100 экз. - Текст: электронный. - URL: <https://new.znaniium.com/catalog/product/392894>
3. Криптографическая защита информации : учеб. пособие / С.О. Крамаров, О.Ю. Митясова, С.В. Соколов [и др.]; под ред. проф. С.О. Крамарова. — Москва : РИОР : ИНФРА-М, 2018. — 321 с. — (Высшее образование). — DOI: <https://doi.org/10.12737/1716-6>. - ISBN 978-5-16-106001-8. - Текст : электронный. - URL: <https://new.znaniium.com/catalog/product/901659>

### Дополнительная

1. Власов, Е. Г. Конечные поля в телекоммуникационных приложениях. Теория и применение FEC, CRC и M-последовательностей : практич. пособие / Е.Г. Власов. — Москва : ИНФРА-М, 2019. — 285 с. + Доп. материалы [Электронный ресурс; Режим доступа <http://new.znaniium.com>]. — (Наука и практика). — [www.dx.doi.org/10.12737/16990](http://www.dx.doi.org/10.12737/16990). - ISBN 978-5-16-100542-2. - Текст: электронный. - URL: <https://new.znaniium.com/catalog/product/1025235>

### 6.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

1. Электронная библиотека Попечительского совета механико-математического факультета Московского государственного университета: <http://lib.mexmat.ru/>
2. Л.С. Понтрягин. Непрерывные группы. [Электронный ресурс] – М.: Наука, 1973. - 527 с. - Режим доступа: <http://bookre.org/reader?file=439841>
3. Джекобсон Н. Теория колец [Электронный ресурс]/ Перевод с англ. - М.: Государственное издательство иностранной литературы. – Режим доступа: <http://bookre.org/reader?file=439814>

### Перечень современных профессиональных баз данных (БД) и информационно-справочных систем (ИСС)

№п/п	Наименование
1	Международные реферативные наукометрические БД, доступные в рамках национальной подписки в 2019 г. Web of Science Scopus
2	Профессиональные полнотекстовые БД, доступные в рамках национальной подписки в 2019 г. Журналы Cambridge University Press ProQuest Dissertation & Theses Global

	SAGE Journals Журналы Taylor and Francis
4	Компьютерные справочные правовые системы Консультант Плюс, Гарант

## 7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Для материально-технического обеспечения дисциплины необходимы:

- учебная аудитория,
- доска,
- проектор (стационарный или переносной),
- компьютер или ноутбук,
- программное обеспечение (ПО).

### Перечень программного обеспечения (ПО)

№п/п	Наименование ПО	Производитель	Способ распространения
1	Microsoft Office 2010 Pro	Microsoft	лицензионное
2	Windows XP/Windows 7/Windows 10	Microsoft	лицензионное
3	Kaspersky Endpoint Security	Kaspersky	лицензионное

## 8. Обеспечение образовательного процесса для лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

В ходе реализации дисциплины используются следующие дополнительные методы обучения, текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в зависимости от их индивидуальных особенностей:

- для слепых и слабовидящих:
  - лекции оформляются в виде электронного документа, доступного с помощью компьютера со специализированным программным обеспечением;
  - письменные задания выполняются на компьютере со специализированным программным обеспечением, или могут быть заменены устным ответом;
  - обеспечивается индивидуальное равномерное освещение не менее 300 люкс;
  - для выполнения задания при необходимости предоставляется увеличивающее устройство; возможно также использование собственных увеличивающих устройств;
  - письменные задания оформляются увеличенным шрифтом;
  - экзамен и зачёт проводятся в устной форме или выполняются в письменной форме на компьютере.
- для глухих и слабослышащих:
  - лекции оформляются в виде электронного документа, либо предоставляется звукоусиливающая аппаратура индивидуального пользования;
  - письменные задания выполняются на компьютере в письменной форме;
  - экзамен и зачёт проводятся в письменной форме на компьютере; возможно проведение в форме тестирования.
- для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:
  - лекции оформляются в виде электронного документа, доступного с помощью компьютера со специализированным программным обеспечением;
  - письменные задания выполняются на компьютере со специализированным программным обеспечением;

- экзамен и зачёт проводятся в устной форме или выполняются в письменной форме на компьютере.

При необходимости предусматривается увеличение времени для подготовки ответа.

Процедура проведения промежуточной аттестации для обучающихся устанавливается с учётом индивидуальных психофизических особенностей. Промежуточная аттестация может проводиться в несколько этапов.

При проведении процедуры оценивания результатов обучения предусматривается использование технических средств, необходимых в связи с индивидуальными особенностями обучающихся. Эти средства могут быть предоставлены университетом, или могут использоваться собственные технические средства.

Проведение процедуры оценивания результатов обучения допускается с использованием дистанционных образовательных технологий.

Обеспечивается доступ к информационным и библиографическим ресурсам в сети Интернет для каждого обучающегося в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

- для слепых и слабовидящих:
  - в печатной форме увеличенным шрифтом;
  - в форме электронного документа;
  - в форме аудиофайла.
- для глухих и слабослышащих:
  - в печатной форме;
  - в форме электронного документа.
- для обучающихся с нарушениями опорно-двигательного аппарата:
  - в печатной форме;
  - в форме электронного документа;
  - в форме аудиофайла.

Учебные аудитории для всех видов контактной и самостоятельной работы, научная библиотека и иные помещения для обучения оснащены специальным оборудованием и учебными местами с техническими средствами обучения:

- для слепых и слабовидящих:
  - устройством для сканирования и чтения с камерой SARA CE;
  - дисплеем Брайля PAC Mate 20;
  - принтером Брайля EmBraille ViewPlus;
- для глухих и слабослышащих:
  - автоматизированным рабочим местом для людей с нарушением слуха и слабослышащих;
  - акустический усилитель и колонки;
- для обучающихся с нарушениями опорно-двигательного аппарата:
  - передвижными, регулируемые эргономическими партами СИ-1;
  - компьютерной техникой со специальным программным обеспечением.

## **9. Методические материалы**

### **9.1. Планы практических занятий**

#### **Тема 1. Теоремы Дедекинда о строении полупростых коммутативных алгебр над полем действительных чисел.**

*Цель занятия:* Разбор примеров конечномерных коммутативных алгебр малой размерности

Форма проведения – решение типовых задач для закрепления и формирования знаний, умений, навыков.

*Задания:*

1. Описать все топологии множества  $\{a, b\}$ .
2. Какие из следующих семейств вещественного пространства образуют топологию: а)  $\square, \emptyset$ , и все подмножества  $(-\infty, x)$ ; б)  $\square, \emptyset$ , и все подмножества  $(-\infty, x]$ .
3. Показать, что семейство интервалов вида  $(-n, n)$ ,  $n$  – натуральное число, является открытым покрытием вещественной прямой с обычной топологией, из которого нельзя извлечь конечно подпокрытия.

*Контрольные вопросы:*

Теоремы Дедекинда о строении полупростых коммутативных алгебр над полем действительных чисел.

Теоремы Фробениуса об конечномерных алгебрах с делением над полем действительных чисел.

## **Тема 2. Топологические группы, кольца, тела.**

*Цель занятия:* Примеры топологических групп, колец и тел

Форма проведения – решение типовых задач для закрепления и формирования знаний, умений, навыков.

*Задания:*

1. Доказать, что компактное метрическое пространство сепарабельно.
2. Задача. Пусть множество  $I$  имеет мощность континуума или больше. Верно ли, что тихоновский куб  $[0, 1]^I$  несепарабелен?
3. Задача. Докажите, что если топологическое пространство  $M$  компактно, то любой монотонный набор непустых замкнутых подмножеств  $Z_i \subset M$  имеет непустое пересечение  $\bigcap_i Z_i$ .
4. Задача. Пусть  $M$  — хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой. Докажите, что  $M$  компактно тогда и только тогда, когда у  $M$  нет бесконечных дискретных подмножеств.
5. Задача. Пусть  $M$  компактно. Выведите из теоремы Александера, что  $M^I$  с тихоновской топологией компактно.

*Контрольные вопросы:*

Связные и вполне несвязные.

Общие свойства топологических тел.

Локально-компактные простые кольца и их строение.

Строение аддитивной группы, типы топологий.

Теоремы Jacobson-Tousky.

Строение коммутативных топологических групп.

## **Тема 3. Неприводимые метрики и топология в поле рациональных чисел.**

*Цель занятия:* Примеры топологических групп, колец и тел

Форма проведения – решение типовых задач для закрепления и формирования знаний, умений, навыков.

*Задания:*

1. Задача. Основная теорема алгебры. Пусть

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$  — полином положительной степени с комплексными коэффициентами. Мы рассматриваем  $P$  как функцию из  $\mathbb{C}$  в  $\mathbb{C}$ . Как топологическое пространство  $\mathbb{C}$  отождествляется с  $\mathbb{R}^2$ . Мы хотим доказать, что  $P(x) = 0$  для какого-то  $x \in \mathbb{C}$ .

2. Задача. Докажите, что полином  $P$  непрерывен.

3. Задача. Докажите, что найдется такое  $\delta > 0$ , что для всех  $|x| > \delta$  выполняется неравенство  $|P(x)| \geq \frac{1}{2} \max |a_i|$ .

4. Задача. Докажите, что найдется такое  $\delta > 0$ , что для всех  $|x| > \delta$  выполняется неравенство  $|P(x)| > R^n$ .

5. Задача. Выведите из этого, что  $|P|$  достигает локального минимума в точке  $a \in \mathbb{C}$ .

6. Задача. Какие квадратные уравнения можно решить в  $\mathbb{Z}_p$ ? А в  $\mathbb{Q}_p$ ?

*Контрольные вопросы:*

Теорема Островского.

Поля  $p$ -адических чисел, их свойства и приложения.

Некоторые обобщения полей  $p$ -адических чисел (конечные расширения).

#### **Тема 4. Топологические группы, кольца, тела.**

*Цель занятия:* Примеры топологических групп, колец и тел

Форма проведения – решение типовых задач для закрепления и формирования знаний, умений, навыков.

*Задания:*

1. Задача. Докажите, что пространство со счетной базой в точке содержит плотное счетное подмножество тогда и только тогда, когда у него есть счетная база.

2. Задача. Приведите пример непрерывного отображения хаусдорфовых пространств, которое а) замкнуто, но не открыто, б) открыто, но не замкнуто.

3. Задача. Докажите, что любой максимальный идеал — простой.

4. Задача. Пусть  $M$  — множество, а  $\mathcal{U} \subset 2^M$  — набор его подмножеств. Докажите, что следующие утверждения равносильны: 1)  $\mathcal{U}$  — ультрафильтр; 2) выполнены следующие свойства: • если  $A \subset B$ ,  $A \in \mathcal{U}$ , то  $B \in \mathcal{U}$ ; • для любого  $A \subset M$  либо  $A$ , либо  $M \setminus A$  лежат в  $\mathcal{U}$  (но не одновременно); • если  $A, B \in \mathcal{U}$ , то  $A \cap B \in \mathcal{U}$ ;  $\emptyset \notin \mathcal{U}$ .

*Контрольные вопросы:*

Теорема Ковальского о строении вполне несвязных топологических тел.

Теорема Понтрягина о строении локально бикомпактных связных тел.

Локально-компактные простые кольца.

#### **9.2. Методические рекомендации по подготовке письменных работ**

***Требования к подготовке и содержанию письменных работ (реферата, доклада):***

1. Соответствие содержания теме и плану работы.

2. Полнота и глубина раскрытия основных понятий проблемы.

3. Достаточность фактов, позволяющих проиллюстрировать актуальность избранной проблемы, способы ее решения.

4. Работа с литературой, систематизация и структурирование материала.

5. Обобщение и сопоставление различных точек зрения по рассматриваемому вопросу.

6. Наличие и четкость выводов, резюме.